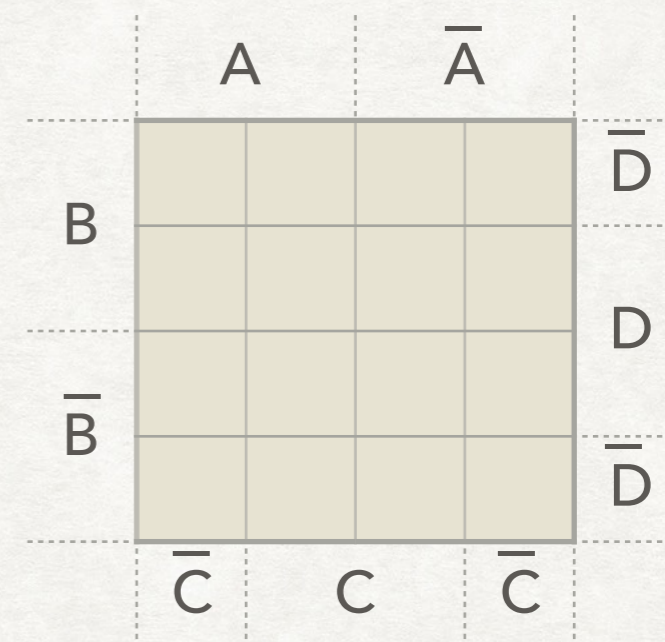
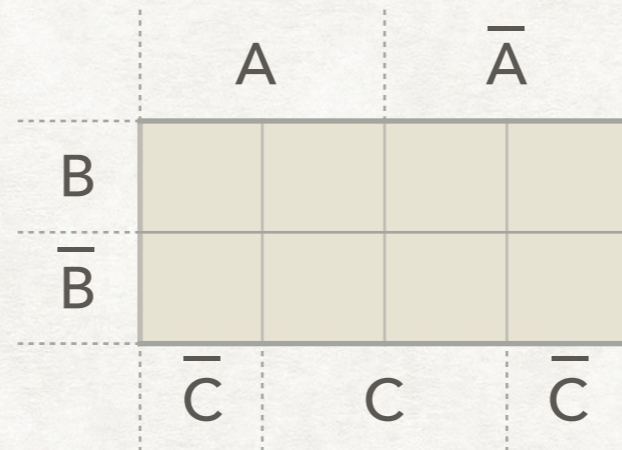


ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТАБЛИЦЫ ИСТИННОСТИ В ЛОГИЧЕСКУЮ ФУНКЦИЮ

КАРТЫ КАРНО

Карта Карно – способ представления таблицы истинности для минимизации усилий по выводу логической функции.

Пример пустых карт Карно для двух, трёх и четырёх аргументов

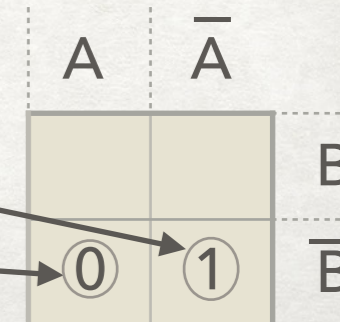


Столбцы и строки таблицы, которые имеют в заголовках отрицание соответствуют ложным (0) значениям аргумента в таблице истинности, а те, что отрицания не имеют (1) – истинным.

А в сами ячейки помещаются значения функции, соответствующие конкретному набору аргументов. Таким образом, столбцы и строки карты Карно задают координаты значения функции.

Например первая строка таблицы истинности, где $A=0, B=0$ соответствует ячейке карты с заголовками \bar{A}, \bar{B} , а третья строка, $A=1, B=0$ соответствует ячейке с заголовками A, \bar{B} .

A	B	F
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1



ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТАБЛИЦЫ ИСТИННОСТИ В ЛОГИЧЕСКУЮ ФУНКЦИЮ

КАРТЫ КАРНО

Рассмотрим заполнение карты Карно на примере

Пусть у нас есть следующая
таблица истинности:

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Мы видим, что нулей у нас
меньше, поэтому расставим
нули, а остальные ячейки
заполним единицами.

Найдем «координаты» нулей.

$$F(010)=0$$

$$F(110)=0$$

$$F(111)=0$$

Соответственно,

нам нужны ячейки

$$F(\bar{A}B\bar{C})=0$$

$$F(AB\bar{C})=0$$

$$F(ABC)=0$$

Найдем соответствующие
ячейки (которые
соответствуют нужным
заголовкам строк и столбцов)

F	A	\bar{A}	
B			
\bar{B}			
	\bar{C}	C	\bar{C}

И поместим в них нули
из таблицы истинности

F	A	\bar{A}	
B	0	0	
\bar{B}			
	\bar{C}	C	\bar{C}

В остальные запишем единицы.

Карта Карно готова!

F	A	\bar{A}	
B	0	0	
\bar{B}	1	1	
	\bar{C}	C	\bar{C}

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТАБЛИЦЫ ИСТИННОСТИ В ЛОГИЧЕСКУЮ ФУНКЦИЮ

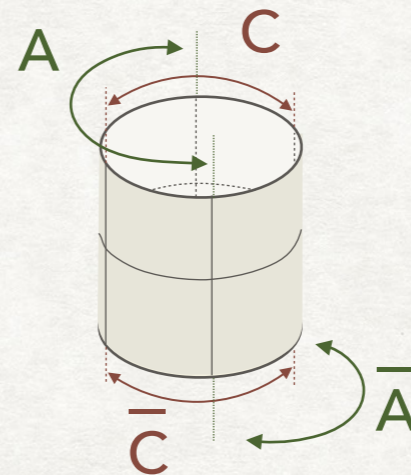
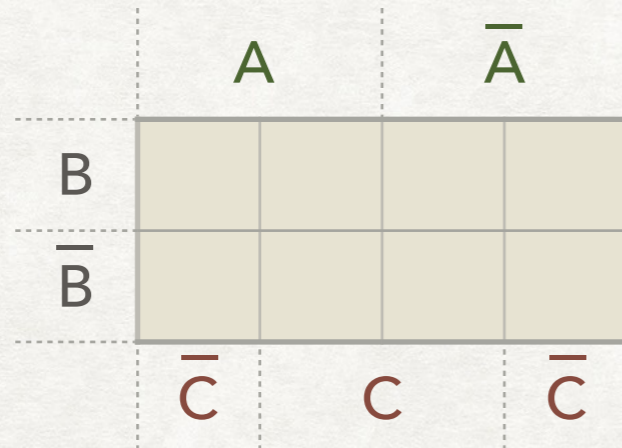
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛОГИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ПО КАРТЕ КАРНО

Определение функции происходит путём объединения соседних ячеек карты с одинаковыми значениями по 1, 2, 4, 8... 2^n ячейки.

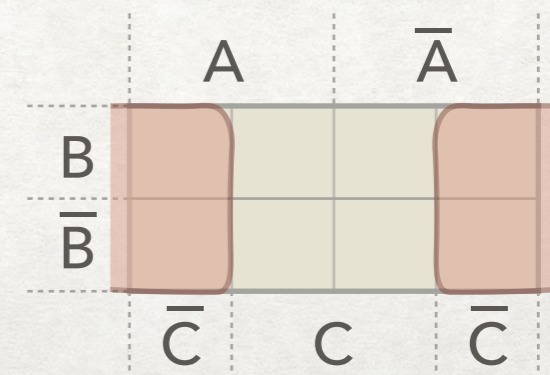
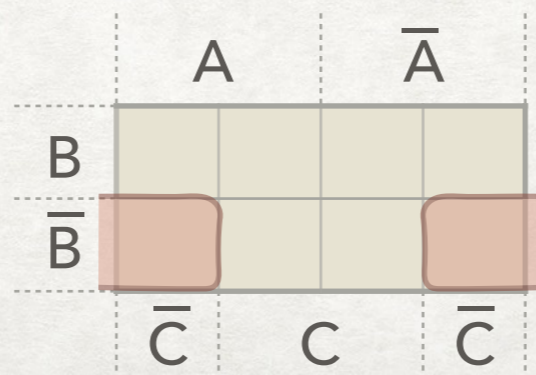
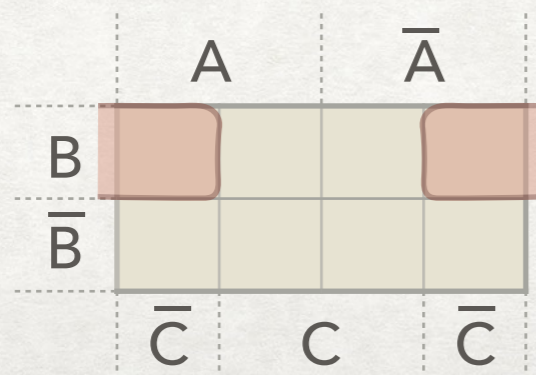
При этом надо понимать, что карты представляют из себя не просто таблицы на плоскости, в них ячейки с одинаковыми заголовками соседствуют.

К примеру,

карту с тремя аргументами можно представить в виде поверхности цилиндра



Поэтому мы имеем право объединять ячейки, как на примерах снизу:



ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТАБЛИЦЫ ИСТИННОСТИ В ЛОГИЧЕСКУЮ ФУНКЦИЮ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛОГИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ПО КАРТЕ КАРНО

Вернёмся к примеру

Карту с тремя аргументами можно представить в виде поверхности цилиндра

F	A	\bar{A}	
B	0	0	1 0
\bar{B}	1	1	1 1
	\bar{C}	C	\bar{C}

Мы можем объединять либо ячейки с нулями, либо с единицами.
Итоговый результат получится одинаковым.

Объединение по единицам:

F	A	\bar{A}	
B	0	0	1 0
\bar{B}	1	1	1 1
	\bar{C}	C	\bar{C}

Первое объединение охватывает четыре единицы и полностью соответствует заголовку \bar{B} .

Второе объединение охватывает две единицы (объединения могут пересекаться) и соответствует пересечению заголовков \bar{A} и C.

Мы помним, что единички можно складывать, поэтому итоговая формула получится: $F = \bar{B} + \bar{A} * C$

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТАБЛИЦЫ ИСТИННОСТИ В ЛОГИЧЕСКУЮ ФУНКЦИЮ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛОГИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ПО КАРТЕ КАРНО

F	A	\bar{A}		
B	0	0	1	0
\bar{B}	1	1	1	1
	\bar{C}	C	\bar{C}	

Объединение по нулям:

Первое объединение охватывает два нуля и соответствует пересечению заголовков A и B.

Оставшийся ноль представим пока оставим в одиночестве.

Он соответствует пересечению заголовков \bar{A} , B, \bar{C} .

Мы помним, что мы объединяли нули, поэтому получили \bar{F} :

$$\bar{F} = A*B + \bar{A}*B*\bar{C}$$

Примечание: также можно было бы вспомнить, что логическое произведение суммы нулей даёт ноль и представить наши объединения через дизъюнкцию конъюнкций:

$$F = (\bar{A} + \bar{B}) * (A + \bar{B} + C)$$

Путем несложных преобразований получаем ту же формулу, что и в случае объединения единиц:

$$\begin{aligned} F &= A*B + \bar{A}*B*\bar{C} = A*B * \overline{\bar{A}*B*\bar{C}} = (\bar{A} + \bar{B}) * (A + \bar{B} + C) = \bar{A}*A + \bar{A}*\bar{B} + \bar{A}*C + A*\bar{B} + \bar{B}*\bar{B} + \bar{B}*C = \\ &= 0 + \bar{B} * (\bar{A} + A + C) + \bar{A}*C = \bar{B} * (1 + C) + \bar{A}*C = \bar{B} + \bar{A}*C \end{aligned}$$

Примечание: мы могли бы быстрее получить итоговую функцию если бы «пересекли» наши объединения:

F	A	\bar{A}		
B	0	0	1	0
\bar{B}	1	1	1	1
	\bar{C}	C	\bar{C}	

Тогда бы наша формула выглядела бы так:

$$F = (\bar{A} + \bar{B}) * (\bar{B} + \bar{C})$$

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТАБЛИЦЫ ИСТИННОСТИ В ЛОГИЧЕСКУЮ ФУНКЦИЮ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛОГИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ПО КАРТЕ КАРНО

Пример

Дана таблица истинности,
восстановить логическую функцию.

	A	\bar{A}	
B	0	0	\bar{D}
	0	1	D
\bar{B}	0	1	D
	1	0	\bar{D}
	\bar{C}	C	\bar{C}

Первое объединение
соответствует $C \cdot D$

	A	\bar{A}	
B	0	0	\bar{D}
	0	1	D
\bar{B}	0	1	D
	1	0	\bar{D}
	\bar{C}	C	\bar{C}

Второе объединение
соответствует $\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C$

	A	\bar{A}	
B	0	0	\bar{D}
	0	1	D
\bar{B}	0	1	D
	1	0	\bar{D}
	\bar{C}	C	\bar{C}

Третье объединение
соответствует $\bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{D}$

	A	\bar{A}	
B	0	0	\bar{D}
	0	1	D
\bar{B}	0	1	D
	1	0	\bar{D}
	\bar{C}	C	\bar{C}

Итоговая функция: $F = C \cdot D + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{D}$